3^0 ΛΥΚΕΙΟ ΚΕΡΑΤΣΙΝΙΟΥ
Λ. ΒΟΥΛΓΑΡΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΚΥΚΛΟΣ

❖ **Κύκλος** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο του επιπέδου αυτού. Το σταθερό σημείο λέγεται **κέντρο** και η σταθερή απόσταση **ακτίνα** του κύκλου.

❖ **Εξίσωση του κύκλου**

➭ Ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$\boxed{\mathbf{x^2+y^2=\rho^2}}$$

➭ Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$\boxed{\mathbf{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}}$$

➭ Η εξίσωση:

$$\boxed{\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0} \quad , \quad A^2+B^2-4\Gamma > 0}$$

παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathbf{K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})}$ και ακτίνα $\boldsymbol{\rho}=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

❖ Οι συντεταγμένες των σημείων $M(x,y)$ του κύκλου C: $x^2+y^2=\rho^2$ και μόνον αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις : **x=ρσυνφ , y=ρημφ ,** φε[0,2π) που λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου.**

❖ **Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου**

➭ Η εφαπτομένη του κύκλου: $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1 ,y_1)$ έχει εξίσωση: $\mathbf{xx_1+yy_1=\rho^2}$

❖ **Μεθοδολογία για τις ασκήσεις**

Για να βρούμε την εξίσωση ενός κύκλου:

ι) Αν είναι γνωστό το κέντρο του $K(x_0,y_0)$ και ο κύκλος διέρχεται από σημείο Α (x_1,y_1)
τότε ρ=ΚΑ.

ιι) Αν είναι γνωστό το κέντρο του $K(x_0,y_0)$ και ο κύκλος εφάπτεται σε γνωστή ευθεία (ε), τότε $\rho = d(K,\varepsilon)$.

ιιι) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε δύο ευθείες (ε_1), (ε_2) , τότε $d(K,\varepsilon_1)=d(K,\varepsilon_2)=\rho$

ιν) Αν ο κύκλος διέρχεται από τρία σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\Gamma(x_3,y_3)$, τότε το κέντρο του $K(x_0,y_0)$ προσδιορίζεται :
α) από το σύστημα ΚΑ=ΚΒ , ΚΑ=ΚΓ ή
β) ως τομή δύο μεσοκαθέτων π.χ των ΑΒ, ΒΓ.

ν) Αν ο κύκλος διέρχεται από δύο γνωστά σημεία Α, Β τότε το κέντρο του βρίσκεται στη μεσοκάθετη της ΑΒ.

νι) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε σημείο Α γνωστής ευθείας (ε) , τότε το κέντρο του βρίσκεται στην κάθετη (ε_1) της (ε) στο σημείο Α.

νιι) Αν ο κύκλος εφάπτεται σε δύο τεμνόμενες ευθείες , τότε το κέντρο του βρίσκεται στη διχοτόμο των γωνιών τους, ενώ αν εφάπτεται σε δύο παράλληλες ευθείες τότε το κέντρο του βρίσκεται στην μεσοπαράλληλη ευθεία.

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου:

ι) Αν αυτή εφάπτεται σε σημείο $M(x_1,y_1)$ του κύκλου, εφαρμόζουμε τη σχέση $\mathbf{xx_1+yy_1=\rho^2}$, αν K(0,0)

ιι) Αν αυτή διέρχεται από σημείο $A(x_1,y_1)$, το οποίο δεν ανήκει στον κύκλο, τότε γράφουμε όλες τις ευθείες που διέρχονται από το Α , δηλαδή:
(ε): $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ και $x=x_1$.

Πρώτον εξετάζουμε αν η $x=x_1$ εφάπτεται στον κύκλο, δηλ. αν το σύστημα $x=x_1$ και εξίσωση κύκλου έχει μία ρίζα.

Δεύτερον απαιτούμε οι ευθείες (ε) να εφάπτονται στον κύκλο, δηλ. να ισχύει: $\rho=d(K,\varepsilon)$, οπότε προσδιορίζουμε το λ, άρα τις εφαπτόμενες (ε).

❖ Σχετικές θέσεις

➾ Θέση σημείου Α ως προς κύκλο

Έστω κύκλος (K,ρ) και σημείο $A(x_1,y_1)$ τότε:

αν **ΚΑ>ρ** το σημείο βρίσκεται εκτός κύκλου
αν **ΚΑ<ρ** το σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου
αν **ΚΑ=ρ** το σημείο είναι σημείο του κύκλου. (αυτό μπορούμε να το δούμε αν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου)

➾ Θέση ευθείας (ε) ως προς κύκλο

Έστω κύκλος (K,ρ) και ευθεία (ε) τότε:
αν **d(K,ε) >ρ** , η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία
αν **d(K,ε) =ρ** , η ευθεία εφάπτεται του κύκλου
αν **d(K,ε) <ρ** , η ευθεία τέμνει τον κύκλο.

- Λύνοντας επίσης το σύστημα των (ε) και C αν έχουμε δύο λύσεις, βρίσκουμε τα δύο σημεία τομής της ευθείας με τον κύκλο , ενώ αν έχουμε μία λύση βρίσκουμε το σημείο επαφής.

➾ Θέσεις δύο κύκλων

Έστω οι κύκλοι (K,R) , (Λ,ρ) τότε:

αν **ΚΛ=R+ρ** , οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (η διάκεντρος ΚΛ περνάει από το σημείο επαφής τους)

αν **ΚΛ=|R-ρ|** , οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά

αν **|R-ρ| < ΚΛ < R+ρ** (και η διάκεντρος τους είναι μεσοκάθετη στην κοινή τους χορδή)

αν **ΚΛ > R+ρ** , κανένα κοινό σημείο, ο ένας εκτός του άλλου

αν **ΚΛ < |R-ρ|** , κανένα κοινό σημείο, ο ένας εντός του άλλου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄

1.Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2

β) έχει κέντρο το σημείο (3, - 1) και ακτίνα 5

γ) έχει κέντρο το σημείο (- 2, 1) και διέρχεται από το σημείο (- 2, 3)

δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α (1, 3) και Β (- 3, 5)

ε) διέρχεται από τα σημεία (2, 1), (1, 2) και (-2, - 1)

στ) διέρχεται από τα σημεία (3, 1), (- 1, 3) και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$

ζ) έχει κέντρο το σημείο (8, - 6) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων

η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$

θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (5, 4)

ι) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 2), εφάπτεται στον άξονα y΄y

ια) έχει κέντρο το σημείο (3, 3) και εφάπτεται των αξόνων x΄x και y΄y

ιβ) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 1) και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου:

α) $x^2 + y^2 = 25$, στο σημείο του Α(4 , 3)

β) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$, στο σημείο του Α(1 , 3)

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$

α) που διέρχεται από το σημείο Α(3 , 4)

β) που διέρχεται από το σημείο Α(5 , 10)

γ) που είναι παράλληλη στην ευθεία $x+2y+3 = 0$

δ) που είναι κάθετη στην ευθεία $3x+4y = 0$

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $(x-1)^2+(y+3)^2 = 9$,που είναι παράλληλη στον άξονα **α)** x΄x **β)** y΄y

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $(x-2)^2+(y+1)^2 = 25$ που διέρχεται από το σημείο Α(3 , 4).

6. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$, ώστε η ευθεία $2x - y + \lambda - 2 = 0$ να είναι εφαπτόμενη του κύκλου $x^2+(y-2)^2 = 5$. Μετά να βρεθεί το σημείο επαφής.

7. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

α) $x^2+y^2-2x-4y+1 = 0$ **β)** $x^2+y^2-2x+4y+5 = 0$ **γ)** $x^2+y^2-5x+8y+25 = 0$

δ) $4x^2+4y^2+16x-4y-83 = 0$ **ε)** $(2x-1)^2 + (2y+3)^2 = 8$

στ) $(x+\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = 2\lambda x + 2\lambda^2$, $\lambda \neq 0$ **ζ)** $x^2+y^2-2x+2\lambda y = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x+3y+2) = 0$, $\lambda \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$

β) Για ποια τιμή του λ ο κύκλος διέρχεται από το σημείο Ο(0 , 0)

9. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-\lambda x-\lambda y = 0$, $\lambda \in R^*$ και η ευθεία $x-y+3 = 0$.
Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η ευθεία:
α) να εφάπτεται του κύκλου **β)** να τέμνει τον κύκλο.

10. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-2x-1 = 0$ και η ευθεία $y = x-3$.
Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και να βρεθεί το σημείο επαφής.

11. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του που περνούν από την αρχή των αξόνων.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 2\lambda y = 0$, $\lambda \in R$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε σταθερή ευθεία.

γ) Για ποια τιμή του λ ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{20}$

δ) Για ποια τιμή του λ ο κύκλος εφάπτεται του άξονα $y'y$

ε) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

13. Δίνεται η εξίσωση $x(x-1) + y(y-1) = \lambda(x+y-1)$, $\lambda \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$

β) Να βρεθεί η εξίσωση εκείνου του κύκλου που το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία $x+2y-6 = 0$.

γ) Για ποια τιμή του λ οι κύκλοι εφάπτονται του άξονα x΄x

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 +y^2 +4\lambda x -2(\lambda-2)y+ 4\lambda^2-4\lambda+4 = 0$, $\lambda \in R^*$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R^*$ η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

γ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται στις ευθείες
ε_1: $4x+3y+6 = 0$ και ε_2: $y = -2$

15. Δίνονται οι κύκλοι : $x^2+y^2 = 9$, $(x-5)^2+y^2 = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι τέμνονται και να βρείτε τα κοινά σημεία τους.

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα κοινά τους σημεία

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα κοινά τους σημεία τέμνονται κάθετα.

16. α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(x-4)^2 +(y-3)^2 = 9$ εφάπτεται του άξονα x΄x και να βρεθεί το σημείο επαφής Α.

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α.

17. Δίνονται οι κύκλοι : $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 +2x-4y+3 = 0$

α) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής χορδής τους ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στη διάκεντρο τους.

18. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

α) $\left|\vec{MA}\right| = 2$ **,** όπου Α(2 , 1) **β)** $\vec{MA}$ κάθετο στο $\vec{MB}$ όπου Α(1,0) , Β(- 1,0)

γ) (ΜΑ) = 2(ΜΒ) , όπου Α(1 ,2) , Β(3 ,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία : $y=3x-7$ και διέρχεται από τα σημεία Α(1,1) , Β(2,-1).

2. Κύκλος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες Οx , Οy και στην ευθεία $3x-4y+6=0$. Να βρεθεί η εξίσωση του και το σημείο επαφής με την ευθεία.

3. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2+y^2=25$, που είναι παράλληλες στην $4x-3y=0$.

4. Από το σημείο Α(2,5) φέρουμε εφαπτομένη στον κύκλο $x^2+y^2-2x-3y=1$. Αν Β το σημείο επαφής, να βρεθεί η ΑΒ.

5. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές (7,1) , (6,4) , (-2,4) , (5,5) είναι εγγράψιμο.

6. **i)** Αν Α ,Β οι τομές του κύκλου $x^2+y^2+4x+2y-20=0$ με την ευθεία $x-7y+20=0$, να αποδείξετε ότι η ΟΑ είναι κάθετη στην ΟΒ (Ο η αρχή των αξόνων)
ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Ο , Α ,Β.

7. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το Α(2,3) και εφάπτεται της ευθείας $4x-5y=0$ στο σημείο Β(5,4).

8. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $2x-3y+26=0$ εφάπτεται του κύκλου: $x^2+y^2-4x+6y-104=0$ και να βρεθεί η εξίσωση της διαμέτρου που διέρχεται από το σημείο επαφής.

9. Να βρεθούν :

ι) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=25$ στο σημείο (3,4)

ιι) Το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες.

10. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2-4x-6y+3=0$, στο σημείο του (5,4).

11. **ι)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $2x^2+2y^2+4x-12y+15=0$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ιι) Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής που ορίζει η ευθεία $x+y=0$ με τον κύκλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο Κ(1,2) και διέρχεται από το σημείο Α(4,6).

2. Να δείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $x^2+y^2-2\lambda x+4y+\lambda^2=0$, $\lambda\in R$ παριστάνει κύκλο με σταθερή ακτίνα.

3. Δίνονται τα σημεία Α(1,2) , Β(3,4) , Γ(2,1). Να βρεθεί ο γ.τ των σημείων Μ , για τα οποία ισχύει: $\vec{MA}.\vec{MB}=2\vec{M\Gamma}^{\,2}$.

4. Έστω ο κύκλος $x^2+y^2=41$ και το σημείο του Α(5,4).

ι) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α.

ιι) Να βρεθεί ο $\lambda\in R$, ώστε το σημείο Μ(λ,2-λ) να απέχει από την εφαπτομένη απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

5. Να βρεθούν οι λ, μ , ώστε τα σημεία Α ,Β να είναι αντιδιαμετρικά στον κύκλο $x^2+y^2-2x+6y+\lambda=0$, Α(λ , 1) , Β(1 , μ)

6. Έστω $\varphi\in[0,2\pi]$ και η εξίσωση C: $x^2+y^2=2(\sigma\upsilon\nu\varphi)x+2(\eta\mu\varphi)y$. Να αποδείξετε ότι:

ι) Η εξίσωση C παριστάνει κύκλο

ιι) Το κέντρο του κύκλου C ανήκει σε ένα ορισμένο κύκλο για κάθε φ.

7. ¨Εστω ο κύκλος C: $x^2+y^2=50$. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

ι) Ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων **Σ - Λ**

ιι) Ο κύκλος έχει ακτίνα ρ=50 **Σ - Λ**

ιιι) Η ευθεία 7x+y=50 εφάπτεται στον κύκλο **Σ - Λ**

ιν) Το σημείο Α(6,4) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου **Σ - Λ**

ν) Ο κύκλος C και ο κύκλος $(x-14)^2+(y-2)^2=50$ εφάπτονται εξωτερικά **Σ - Λ**

8. Έστω τα σημεία Α(-1,0) και Β(1,0). Να βρεθεί ο γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου , για τα οποία ισχύει: $\vec{MA}.\vec{MB}=\det(\vec{MA},\vec{MB})$.

9. Να βρεθεί ο γ.τ των σημείων Μ(x,y) , αν τα διανύσματα : $\vec{\alpha}=(x,y)$ και $\vec{\beta}=(x-4\ ,y-8)$ είναι κάθετα.

10. Να βρεθεί ο $k>0$, ώστε οι κύκλοι $(x+8)^2+y^2=k^2$ και $x^2+(y-6)^2=9k$ να εφάπτονται.

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+2x-4y-20=0$.

ι) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ.

ιι) Να βρείτε την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία $x+y=1$. Τι παρατηρείτε;

12. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=\sqrt{8}$, η οποία διέρχεται από το σημείο Α(-3,0).

13. Οι κύκλοι $(x-3)^2+y^2=9$ και $x^2+(y-3)^2=9$ έχουν κοινή χορδή την ευθεία:

Α: $x+y=0$ Β: $x-y=3$ Γ: $y=x$ Δ: $x+y=3$ Ε: καμία από αυτές.

14. Δίνονται τα σημεία Α(-1,0) και Β(2,0). Να βρείτε τον γ.τ των σημείων Μ του επιπέδου , των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα Α , Β είναι ίσος με 2/3.

15. ι) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ(0,1) , Λ(1,2) και Μ(3,-1) είναι ομοκυκλικά.

ιι) Να προσδιορίσετε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Κ,Λ,Μ

ιιι) Σε ποια σημεία τέμνει ο κύκλος αυτός τους άξονες x΄x και y΄y.

16. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

ι) Η ευθεία $y=2x$ τέμνει τον κύκλο $x^2+y^2=2$ σε δύο σημεία που είναι αντιδιαμετρικά. **Σ - Λ**

ιι) Η εξίσωση $x^2+y^2-2x+y+20=0$ παριστάνει κύκλο. **Σ - Λ**

ιιι) Ο κύκλος $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, όπου $A=B=0$, έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0,0) **Σ - Λ**

ιν) Η ευθεία $x\sigma\upsilon\nu\varphi+y\eta\mu\varphi=4\eta\mu\varphi-2\sigma\upsilon\nu\varphi+4$, $\varphi\in R$, εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2+4x-8y+4=0$ **Σ - Λ**

17. Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η εξίσωση $x^2+y^2-4x-2\lambda y+2\lambda-4=0$ παριστάνει κύκλο; Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε ο κύκλος να έχει ακτίνα $\rho=\sqrt{8}$.

18. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\vec{AB}=(4,3)$ και $\vec{A\Gamma}=(1,7)$

ι) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\vec{B\Gamma}$

ιι) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο

ιιι) Αν η κορυφή Α κινείται πάνω στον κύκλο $x^2+y^2=4$, να αποδείξετε ότι και το κέντρο Κ του ΑΒΓΔ κινείται πάνω σε ένα ορισμένο κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄

1. Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2 = 2\lambda(3x-y)$, (1) $\lambda \in R^*$

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ,για κάθε $\lambda \in R^*$, κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος που ορίζεται από την (1) εφάπτεται της ευθείας $y = 3x$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων που ορίζονται από την (1).

2. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+(\lambda-2\mu)y^2 = \lambda$, που διέρχεται από το σημείο Α(1 , -2)

α) Να βρείτε τα λ , μ

β) Για $\lambda =5$ και $\mu = 2$

i) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C στο Α εφάπτεται στον κύκλο C΄ : $x^2+y^2-2(x-1)\sqrt{5}-1 = 0$

ii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C , C΄ τέμνονται.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(y-1)^2-\mu(x-y) = 1+2\mu$ (1) , $\mu \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του μ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να βρείτε εκείνον τον κύκλο που ορίζεται από την (1) και εφάπτεται στον άξονα x΄x

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του μ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
Ποια είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

4. Δίνονται οι κύκλοι: C_1: $x^2+y^2-2x-4y+1 = 0$, C_2: $x^2+y^2-4x-2y+1 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι εφάπτονται στους άξονες x΄x , y΄y αντίστοιχα.

β) Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΚΛ , όπου Α , Β τα σημεία επαφής με τους άξονες και Κ , Λ τα κέντρα των C_1 , C_2 αντίστοιχα.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(2\kappa+5)x-6y+4\kappa-\alpha = 0$ (1) , $\kappa , \alpha \in R$.

α) Να βρεθεί για ποιες τιμές του α η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\kappa \in R$.

β) Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων.

γ) Για τη μικρότερη τιμή του α , να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 2$ τέμνει όλους τους κύκλους.στα ίδια σημεία.

6. Δίνονται οι κύκλοι: $x^2+y^2 = 1$, $(x-2)^2+y^2 = 4$ και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$
Να βρεθούν οι $\lambda , \beta \in R$ ώστε η ευθεία να εφάπτεται στους δύο κύκλους.

7. Δίνονται τα σημεία Ο(0 , 0) , Α(2 , 6) , Β(6 , 3). Να βρείτε:

α) Το συμμετρικό Α΄ του Α ως προς την ευθεία ΟΒ

β) Την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Α΄ ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ΟΑ

γ) Την $\text{προβ}_{\vec{OB}} \vec{OA}$ **δ)** το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΑ΄

8. Δίνονται οι κύκλοι: C_1: $x^2+y^2+2x = 0$, C_2: $x^2+y^2-4x-6y+4 = 0$
Από τυχαίο σημείο Ρ φέρουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ και ΡΒ στους C_1 , C_2 στα σημεία Α , Β αντίστοιχα. Αν ΡΑ = ΡΒ , να αποδείξετε ότι το Ρ βρίσκεται σε ορισμένη ευθεία , η οποία είναι καθετη στη διάκεντρο των παραπάνω κύκλων.

9. Δίνεται η εξίσωση C: $x^2+y^2 + (\eta\mu\theta)\, x - (\sigma\upsilon\nu\theta)\, y = 2$ (1) , $\theta \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του θ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να αποδείξετε ότι , όταν το θ μεταβάλλεται , τα κέντρα των κύκλων C βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\theta \in [0, \pi)$ αν είναι γνωστό ότι ο κύκλος διέρχεται από το σημείο $M(1, -1)$

10. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τα οποία σχηματίζουν γωνία $\hat{\phi} = \frac{\pi}{3}$

και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha}|x - |\vec{\beta}|y + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \quad (1)$

α) Να αποδείξετε ότι : $2\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$

β) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

γ) Αν $K(1, 1)$ είναι το κέντρο του παραπάνω κύκλου , να αποδείξετε ότι:

ι) $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $\rho = 1$

ιι) Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $3x+4y-12 = 0$

ιιι) Η προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ είναι ίση με $\vec{\alpha}$