3^0 ΛΥΚΕΙΟ ΚΕΡΑΤΣΙΝΙΟΥ
Λ. ΒΟΥΛΓΑΡΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

❖ **Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν** ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$,με $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\in R$ και $\alpha_\nu\neq 0$

❖ **Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης** ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$P(x)= \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ δηλ. κάθε αριθμό ρ τέτοιο ώστε $P(\rho)=0$.

❖ **Θεώρημα ακεραίων ριζών**

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης , τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει γενικά.
Δηλαδή μπορεί ο ακέραιος ρ να είναι διαιρέτης του α_0 , χωρίς να είναι ρίζα της εξίσωσης.

❖ **Επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης**

$1^{ου}$ βαθμού	
$\alpha x+\beta=0$	• αν $\alpha\neq 0$ έχει μοναδική λύση την $x=-\beta/\alpha$ • αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$ είναι αδύνατη • αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και αληθεύει για κάθε $x\in R$ (δηλ. είναι ταυτότητα)
$2^{ου}$ βαθμού	
$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$,$\alpha\neq 0$ διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-\alpha\gamma$	• αν $\Delta>0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ • αν $\Delta=0$ έχει μία διπλή πραγματική ρίζα την $x=-\beta/2\alpha$ • αν $\Delta<0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.
Πολυωνυμικές εξισώσεις $P(x)=0$, βαθμού μεγαλυτέρου του $2^{ου}$	Παραγοντοποιούμε το $P(x)$ και αναγόμαστε στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού με βάση την ισοδυναμία: $P_1(x).P_2(x).....P_k(x)=0\Leftrightarrow P_1(x)=0$ ή $P_2(x)=0$ …ή $P_k(x)=0$

❖ Αν η παραγοντοποίηση του $P(x)$ σε γινόμενο παραγόντων είναι δύσκολη, τότε βρίσκουμε τις πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ (διαιρέτες του σταθερού όρου). Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ελέγχουμε αν κάποια απ' αυτές είναι ρίζα) . Τότε το $P(x)$ αναλύεται ως εξής : $P(x)= (x-\rho)\Pi(x)$ όπου $\Pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(x): (x-\rho)$

❖ Οι μόνες πιθανές ακέραιες ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου.

❖**Σχόλια:**

i) Αν όλοι οι συντελεστές ενός πολυωνύμου $P(x)$ είναι ομόσημοι , τότε το $P(x)$ δεν έχει θετική ρίζα.

ii) Το πλήθος των ριζών ενός μη μηδενικού πολυωνύμου δεν υπερβαίνει ποτέ τον βαθμό του.

❖ Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα x΄x έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.
(Τεταγμένη καθενός από τα σημεία αυτά είναι το 0)

❖Τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f , g έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.
(Η τεταγμένη ενός τέτοιου σημείου , προκύπτει αν βάλουμε την τετμημένη του στον τύπο της f ή της g).

❖**Διτετράγωνες εξισώσεις**

Οι εξισώσεις της μορφής $\boldsymbol{\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0}$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$ λέγονται διτετράγωνες και επιλύονται ως εξής: Θέτουμε $x^2=y$, $y\geq 0$ οπότε προκύπτει η εξίσωση : $\boldsymbol{\alpha y^2+\beta y+\gamma=0}$ **(επιλύουσα).**
Βρίσκουμε τις ρίζες της επιλύουσας και μετά τις ρίζες της διτετράγωνης.

❖ **Αντίστροφες εξισώσεις**

Μια πολυωνυμική εξίσωση λέγεται **αντίστροφη** όταν για κάθε ρίζα της $\boldsymbol{\rho\neq 0}$ είναι και ο $\frac{1}{\rho}$ ρίζα της.
Στις αντίστροφες εξισώσεις οι συντελεστές των όρων που ισαπέχουν από τα άκρα είναι ίσοι ή αντίθετοι π.χ $6x^3-7x^2-7x+6=0$

Για την επίλυση τους:

Αν είναι **άρτιου** βαθμού τότε: Διαιρούμε με $x^{\nu/2}$ όπου ν ο βαθμός της (για $x\neq 0$) Θέτουμε $x+\frac{1}{x}=y$ …… Αν είναι **περιττού** βαθμού με σχήμα Horner (ή παραγοντοποίηση) αναγόμαστε σε αντίστροφη άρτιου βαθμού.

- **Πολυωνυμικές εξισώσεις που λύνοται με βοηθητικό άγνωστο**

Μερικές πολυωνυμικές εξισώσεις, συνήθως μεγάλου βαθμού, είναι δύσκολο να λυθούν με τις μεθόδους που γνωρίζουμε. Τότε διευκολύνει η χρησιμοποίηση βοηθητικού αγνώστου . Έτσι με την αντικατάσταση κατάλληλης παράστασης του x με νέο άγνωστο y , αναγόμαστε σε απλούστερες μορφές εξισώσεων.

π.χ $\mathbf{x^6+26x^3-27=0}$ (θέτουμε $x^3=y$) ή
$\mathbf{(x^2-2x+3)^2-4(x^2-2x+3)+3=0}$ (θέτουμε $x^2-2x+3=y$)

- **Ρητές εξισώσεις είναι οι εξισώσεις στις οποίες τουλάχιστον ένας όρος είναι ρητή παράσταση του αγνώστου x .**

Για τη λύση τους ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο παραγόντων και βρίσκουμε το Ε.Κ.Π τους.($\neq 0$)

- Κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών δηλ. πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Εκτελούμε τις πράξεις μεταφέροντας όλους τους όρους της εξίσωσης στο 1^0 μέλος οπότε καταλήγουμε σε πολυωνυμκές εξισώσεις την οποία λύνουμε

- Ελέγχουμε ποιες από τις ρίζες που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς , οπότε είναι δεκτές, διαφορετικά απορρίπτονται.

- **Άρρητες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος x εμφανίζεται κάτω από ριζικό.**

- **Για** την επίλυση τους βάζουμε τους περιορισμούς (κάθε υπόριζο ≥ 0)

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης σε κατάλληλη δύναμη, με στόχο να διώξουμε τα ριζικά και να καταλήξουμε σε πολυωνυμική εξίσωση την οποία και λύνουμε. Για όσες από τις λύσεις που βρήκαμε είναι δεκτές από τους αρχικούς περιορισμούς , κάνουμε επαλήθευση στην αρχική εξίσωση.

Σχόλια:

- Όταν υψώνουμε και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης σε **άρτια δύναμη** , η εξίσωση που προκύπτει δεν είναι ,γενικά, ισοδύναμη με την αρχική, δηλαδή η εξίσωση που προκύπτει έχει ως ρίζες της όλες τις ρίζες της αρχικής, μπορεί όμως να έχει και άλλες ρίζες εκτός από αυτές. Έτσι είναι απαραίτητο να διαπιστώνουμε με **επαλήθευση** στην αρχική εξίσωση ποιες από τις ρίζες που βρήκαμε είναι και ρίζες της και ποιες όχι.

- Αν και τα δύο μέλη μιας άρρητης εξίσωσης είναι **ομόσημα** (δηλ. και τα δύο ≥ 0 ή και τα δύο ≤ 0) και υψώσουμε σε **άρτια δύναμη** , τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική εξίσωση (δηλ. έχει τις ίδιες ακριβώς ρίζες).
Έτσι πριν υψώσουμε τα μέλη μιας εξίσωσης σε κάποια άρτια δύναμη φροντίζουμε , θέτοντας τους κατάλληλους περιορισμούς , ώστε αυτά να είναι ≥ 0.

Οπότε με $f(x) \geq 0$ ισχύει η ισοδυναμία :

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^2(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

[ο περιορισμός $f(x) \geq 0$ μπορεί να παραλειφθεί, αφού καλύπτεται από την $f(x)=g^2(x)$]

◆Τα παραπάνω μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε και να επιλύουμε άρρητες εξισώσεις χωρίς να είναι απαραίτητο στο τέλος η επαλήθευση στην αρχική εξίσωση.

➢ Όταν υψώνουμε και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης σε περιττή δύναμη, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική. Γι' αυτό στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισοδυναμίες και δεν είναι απαραίτητο στο τέλος να κάνουμε επαλήθευση.

➢ Όταν η εξίσωση έχει ριζικά διαφορετικών τάξεων ,τότε υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης σε δύναμη ίση με το Ε.Κ.Π των τάξεων των ριζικών.

❖ Πολυωνυμικές ανισώσεις

➢ Για να λύσουμε την **ανίσωση P(x)>0** (ή **P(x)<0**) βαθμού μεγαλυτέρου του $2^{ου}$ προσπαθούμε να αναλύσουμε το P(x) σε γινόμενο παραγόντων $1^{ου}$ ή $2^{ου}$ βαθμού των οποίων γνωρίζουμε το πρόσημο.

Κατασκευάζουμε πίνακα με το πρόσημο κάθε παράγοντα και προσδιορίζουμε το πρόσημο του P(x).

➢ Στις **κλασματικές ανισώσεις** απαλοιφή παρονομαστών δεν κάνουμε (εκτός και αν γνωρίζουμε το πρόσημο του Ε.Κ.Π των παρονομαστών)
Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^0 μέλος και αφού μετατρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα , τα προσθέτουμε.

Καταλήγουμε έτσι σε ανίσωση της μορφής:

$\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ (ή $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$) η οποία ισοδύναμα γράφεται: $P(x)Q(x) >0$ (ή $P(x)Q(x) <0$)

➢ Για κάθε $\nu\in N^*$ έχουμε:
- Αν α,β θετικοί ισχύει: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$
- Αν α,β αρνητικοί ισχύουν:
  ι) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$, ν άρτιος, ιι) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$, ν περιττός

Προσοχή! Αν α, β ετερόσημοι και α > β δεν επιτρέπεται να υψώσουμε και τα δύο μέλη σε άρτια δύναμη.

➢ Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x όταν f(x) > 0 ενώ βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ όταν f(x) <0.

➢ Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω (κάτω) από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g όταν f(x) >g(x) (f(x) < g(x)).

Λ. ΒΟΥΛΓΑΡΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

ι) $x^3-2x^2-25x+50=0$ **ιι)** $3x^4-8x^3-12x^2+32x=0$

ιιι) $x^3+2x^2-6x-27=0$ **ιν)** $2x^3-3x^2-3x+2=0$

ν) $x^3+2x^2-6x-27=0$ **νι)** $4x^3+3x^2-4x-3=0$

νιι) $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$ **νιιι)** $x^3+2x^2+3x-6=0$

2. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες η εξίσωση :
$\alpha x^4+x^3-(\alpha^3+1)x^2-\alpha^2x+4=0$ έχει ρίζα το -1. Στη συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις που προκύπτουν για τις τιμές του α που βρήκατε.

3. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^4+4\alpha x^3-2x^2+3\beta x+2$.
Να βρεθούν οι $\alpha, \beta\in R$ ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντες τους $x-1$, $x+2$. Γι' αυτές τις τιμές να λυθεί η εξίσωση: $P(x)=0$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)= 2x^3+\alpha x^2+\beta x-20$.

ι) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta\in R$ ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το $x+2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ να είναι ίσο με -16.

ιι) Για $\alpha = 12$, $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)= 0$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= x^3+(\alpha -1)x+2$. Αν το σημείο Μ(2,4) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης , να βρεθούν τα σημεία τομής της με τον άξονα x΄x.

6. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x , όταν:

ι) $f(x)= 2x^3-7x^2-3x+18$ **ιι)** $f(x)=2x^3-3x^2+1$

7. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων
$f(x)=2x^3+x^2+x-3$, $g(x)=-3x^2+3x+1$

8 . Να λύσετε τις εξισώσεις:

ι) $(3x-1)^6+7(3x-1)^3-8=0$ **ιι)** $(x^2-x+2)^2-10(x^2-x-5)-49=0$

ιιι) $(x+2)^8-3(x+2)^4-4=0$ **ιv)** $x^{20}+5x^{13}-6x^6=0$

v) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\left(\frac{x}{x+1}+1\right)=30$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

ι) $x^4+4x^2-5=0$ **ιι)** $x^4-7x^2+12=0$ **ιιι)** $x^4-8x^2-9=0$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

ι) $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$ **ιι)** $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ **ιιι)** $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

ι) $\frac{2x-1}{x-3}+\frac{x^2}{x-2}=\frac{3x-6}{x^2-5x+6}$ **ιι)** $\frac{2x^2}{x^2-1}+\frac{x}{1-x}=\frac{3}{x+1}$

ιιι) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x^2+3}{x^2-4x+3}=\frac{x^2+5x+2}{x-3}$ **ιv)** $\frac{x^3-8}{x^2-5x+4}+\frac{x^2+x-6}{x-4}=\frac{x-2}{x-1}$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

ι) $\sqrt{2x+2}+3=x$ **ιι)** $\sqrt{2x^2-1}-x=x-3$ **ιιι)** $x=\frac{2}{\sqrt{x}}+3$

ιv) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+5}=1$ **v)** $\sqrt{x-1}-1=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$ **vι)** $x^2-6x-2\sqrt{x^2-6x+2}=1$

13. Να λυθούν οι ανισώσεις:

ι) $x^4-2x^3-x+2>0$ **ιι)** $-x^4+x^3-x+1\geq 0$ **ιιι)** $x^4-4x^3+x^2+8x-6>0$

ιv) $\frac{5x^3+1}{x^2-1}-\frac{3}{x-1}>1$ **v)** $\frac{x^2}{x-1}>\frac{2}{x^2-1}$ **vι)** $x^2+\frac{3x^2-x-1}{x-1}-\frac{x^2-2}{x-x^2}>0$

vιι) $\sqrt{3x+7}<\sqrt{x+3}$ **vιιι)** $\sqrt{x-1}\geq\sqrt{x+5}$

14. Να βρεθούν οι α, β $\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\beta+1)x-\beta$ να τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(\frac{1}{2}, 0)$, $B(1,0)$. Στη συνέχεια να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x + \beta$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x^2-4 είναι $3x-2$

ι) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ και το πηλίκο αυτής της διαίρεσης

ιι) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=3x-2$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^3 + \alpha x + \beta$.
Αν το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 + x + 1$ διαιρεί το P(x)

ι) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 5$

ιι) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - (\kappa-1)x + \lambda - 3$, $\kappa, \lambda \in R$

α) Αν το P(x) έχει παράγοντα το $(x+2)^2$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 21$ και $\lambda = -21$.

β) Για τις τιμές των κ, λ του ερωτήματος α)

ι) Να βρείτε το πηλίκο $\Pi_1(x)$ της διαίρεσης $P(x) : (x+2)$

ιι) Να βρείτε το πηλίκο $\Pi_2(x)$ της διαίρεσης $P(x) : (x+2)^2$

ιιι) Να λύσετε την ανίσωση $\Pi_1(x) - \Pi_2(x) > 0$.

18. Δίνονται οι εξισώσεις $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1$ και $6x^3 - (\lambda^2+16)x^2 + (\lambda+10)x - 2 = 0$

ι) Αν έχουν κοινή ρίζα να βρεθεί ο $\lambda \in R$.

ιι) Για $\lambda = 1$ να λύσετε την ανίσωση

$$6x^3 - (\lambda^2+16)x^2 + (\lambda+10)x - 2 > 0$$

3^0 ΛΥΚΕΙΟ ΚΕΡΑΤΣΙΝΙΟΥ
Λ. ΒΟΥΛΓΑΡΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

➢ **Μονώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής:
$\mathbf{\alpha x^{\nu}}$, όπου $\alpha \in R$ και $\nu \in N^*$.

- **α**: συντελεστής , **ν**: βαθμός , $\mathbf{x^{\nu}}$: κύριο μέρος του μονωνύμου
- **όμοια μονώνυμα** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

➢ **Πολυώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής:

$\mathbf{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots \alpha_1 x + \alpha_0}$, όπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu \in R$, και $\nu \in N$. Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε με P(x) , Q(x) ...

- **Σταθερό πολυώνυμο** λέγεται το πολυώνυμο της μορφής α_0 , δηλ. οι πραγματικοί αριθμοί.
- **Μηδενικό πολυώνυμο** λέγεται το σταθερό πολυώνυμο 0.

➢ **Στοιχεία του πολυωνύμου $\mathbf{P(x)= \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots \alpha_1 x + \alpha_0}$, $\mathbf{\alpha_\nu \neq 0}$**

- **Όροι:** λέγονται τα μονώνυμα $\alpha_\nu x^\nu$, ...,α_0
- **Σταθερός όρος:** είναι ο όρος α_0 που δεν περιέχει x.
- **Συντελεστές :** λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί α_ν, $\alpha_{\nu-1}$..., α_0
- **Βαθμός:** είναι ο εκθέτης ν.
- **Αριθμητική τιμή για $\mathbf{x = x_0}$:** λέγεται ο αριθμός $P(\mathbf{x_0})$, που προκύπτει αν στο P(x) αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό $\mathbf{x_0}$.
- **Ρίζα πολυωνύμου:** είναι ένας πραγματικός αριθμός ρ αν και μόνο αν ισχύει: **P(ρ)=0**

Σχόλιο! Βαθμός μηδενικού πολυωνύμου δεν ορίζεται , ενώ ο βαθμός κάθε σταθερού πολυωνύμου είναι μηδέν.

- **Δύο πολυώνυμα λέγονται ίσα,** όταν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι.

- **Πράξεις πολυωνύμων**

  - Για την **πρόσθεση , αφαίρεση, πολλαπλασιασμό** πολυωνύμων ισχύουν οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Προσοχή! στην πρόσθεση, αφαίρεση πολυωνύμων, πρέπει να προσθέτουμε μεταξύ τους μόνο τα όμοια μονώνυμα που είναι όροι των πολυωνύμων αυτών.

- **Διαίρεση πολυωνύμων**

- **Θεώρημα (ταυτότητα της διαίρεσης)**

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)\neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

$\mathbf{\Delta(x)=\delta(x).\pi(x)+\upsilon(x)}$ όπου:

Το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος ,** το $\delta(x)$ λέγεται **διαιρέτης** ,
το $\pi(x)$ λέγεται **πηλίκο** και το $\upsilon(x)$ λέγεται **υπόλοιπο** της διαίρεσης.
Το $\upsilon(x)$ είναι ή το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

- Αν σε μία διαίρεση είναι $\upsilon(x)=0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται: $\mathbf{\Delta(x)=\delta(x).\pi(x)}$

  Σ'αυτή την περίπτωση λέμε ότι το **δ(x) διαιρεί το Δ(x)**

  ή ότι **το δ(x) είναι παράγοντας του Δ(x)** ή ότι **το Δ(x) διαιρείται με το δ(x)**

  ή ότι **το δ(x) είναι διαιρέτης του Δ(x).**

- Για τη διαίρεση πολυωνύμων ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

  ⇒ Γράφουμε τα δύο πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και τα τοποθετούμε κάνοντας το σχήμα της διαίρεσης (όταν στο διαιρετέο λείπει κάποιος όρος τότε ή αφήνουμε τη θέση κενή ή γράφουμε $0x^k$, κ η δύναμη του x που λείπει).

  ⇒ Διαιρούμε τον πρώτο όρο του διαιρετέου με τον πρώτο όρο του διαιρέτη βρίσκοντας τον πρώτο όρο του πηλίκου.

⇒ Πολλαπλασιάζουμε τον πρώτο αυτό όρο του πηλίκου με όλους τους όρους του διαιρέτη και τα γινόμενα που προκύπτουν τα γράφουμε με αντίθετο πρόσημο κάτω από τους αντίστοιχους όρους του διαιρετέου και προσθέτουμε. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο.

⇒ Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρις ότου το τελικό υπόλοιπο υ(x) είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του διαιρέτη.

- Για να διαιρέσουμε πολυώνυμα με περισσότερες της μιας μεταβλητές , θεωρούμε αυτά ως πολυώνυμα με μια μόνο μεταβλητή (όποια θέλουμε) ενώ τις υπόλοιπες τις θεωρούμε σαν αριθμούς και κάνουμε τη διαίρεση κανονικά.

➢ Διαίρεση πολυωνύμου με x-ρ

- **Θεώρημα 1.**
  Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ , δηλαδή υ= P(ρ)

- **Θεώρημα 2.**
  Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x) , δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ)=0.

➢ Σχήμα Horner

Το σχήμα Horner είναι μια μέθοδος με την οποία μπορούμε να βρούμε:

⇒ Το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x-ρ)

⇒ Την αριθμητική τιμή του P(x) για x=ρ.

⇒ Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Κατασκευάζουμε πίνακα με τρεις γραμμές. Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του P(x) γράφοντας 0 όπου δεν υπάρχει αντίστοιχη δύναμη του x έχοντας σε ξεχωριστή στήλη τον αριθμό ρ (δηλ. τη ρίζα του x-ρ)
- Η πρώτη θέση της δεύτερης γραμμής παραμένει κενή ενώ στη πρώτη θέση της τρίτης γραμμής γράφουμε τον πρώτο συντελεστή του P(x)
- Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ.
- Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.
- Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ , δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου P(x) για x=ρ.
  Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

- Για να δείξουμε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με γινόμενο της μορφής **$(x-α)(x-β)$** αρκεί να δείξουμε ότι:
  - Το $x-α$ διαιρεί το $P(x)$ οπότε: $P(x)=(x-α)Π_1(x)$ (1)
  - Το $x-β$ διαιρεί το $Π_1(x)$ οπότε: $Π_1(x)=(x-β)Π_2(x)$ (2)
  - Από (1) , (2) παίρνουμε : $P(x)=(x-α)(x-β)Π_2(x)$ δηλ. το ζητούμενο.

- Για να δείξουμε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ **έχει παράγοντα το $(x-ρ)^2$** αρκεί να δείξουμε ότι:

  ι) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-ρ$, οπότε : $P(x)=(x-ρ)Π_1(x)$

  ιι) Το πηλίκο $Π_1(x)$ έχει παράγοντα ο $x-ρ$ οπότε: $Π_1(x)=(x-ρ)Π_2(x)$

  Άρα $P(x)=(x-ρ)^2Π_2(x)$.

  Δηλαδή αρκεί: **$P(ρ)=0$ και $Π_1(ρ)=0$**

Παρατήρηση: Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοπδύναμες:

- Το $P(x)$ διαιρείται με το $x - ρ$
- Το $x - ρ$ είναι διαιρέτης του $P(x)$
- Το $x - ρ$ είναι παράγοντας του $P(x)$
- Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - ρ$
- Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - ρ$ είναι τέλεια
- Ο αριθμός $ρ$ είναι ρίζα του $P(x)$ δηλαδή $P(ρ) = 0$

3^0 ΛΥΚΕΙΟ ΚΕΡΑΤΣΙΝΙΟΥ
Λ. ΒΟΥΛΓΑΡΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

α) $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$
β) $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$
γ) $(3x^3 - 4\alpha x + \alpha^2) : (x - 2\alpha)$
δ) $(x^4+x^2-x-2): (x^2-x-1)$

ε) $(x^5-4x^4-3x^2+6x-3): (x^3+2x^2+1)$

στ) $x^3: (x^2-3x+2)$

ζ) $(3x^3-5\alpha x^2+3\alpha^2x-2\alpha^3): (3x^2-2\alpha x+\alpha^2)$

η) $(4x^4-2\alpha x^3+6\alpha^2x^2-7\alpha^3x-\alpha^4): (2x-\alpha)$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο f (x) το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

3. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \alpha x + \beta$, να αφήνει υπόλοιπο 0.

4. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα $\alpha , \beta \in R$

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το P (x) διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha , \beta \in R$.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

7. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο P (x) έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.

8. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$

β) $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$

γ) $[6x^3 - (2\alpha + 6\alpha^2)\, x + 3\alpha^2] : (x - \alpha),\ \ \alpha \in R$

δ) $(x^6 - 4x^5 + x^2 - 2) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - \frac{1}{\lambda^2}\, x^3 + \lambda x^2 - 2) : (\lambda x + 1)\ ,\ \ \lambda \in R^*$

9. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ , λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)\, x + 5$ να έχει για παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.

10. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + \alpha)\, x + \beta + 10$ να έχει για παράγοντα το $(x - 2)^2$.

11. Το πολυώνυμο P (x) διαιρούμενο με x - 2 αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με x + 3 αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P (x) με το (x - 2) (x + 3).

12. Να γίνει η διαίρεση : $(4x^4+2x^3-6x^2+3\lambda x+\kappa)$: (x^2-x+1) και να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in R$ ώστε η διαίρεση να είναι τέλεια.

13. Για ποιες τιμές των $\alpha,\beta \in R$ το x^2-x+1 διαιρεί το πολυώνυμο $P(x) = -2x^3+\alpha x^2-\beta x+5^{\alpha}$.

14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2-x+2$. Να γίνει η διαίρεση $[P(x+1)-2P(x)]:(x^2-2)$

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+4\alpha x^3-2x^2+3\beta x+2$. Να βρεθούν οι α , $\beta\in R$ αν το P(x) έχει παράγοντες τους x-1, x+2.

16. Αν τα πολυώνυμα $P(x)=x^3-\alpha x+30$, $Q(x)=\alpha x^4+2x-2$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το x+2 , να βρεθεί ο $\alpha\in R$.

17. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης: $[(2x^2-1)^{2010}+3(x^2-1)^{2011} -7x^{2012}+6x-3]$: (x^3-x)

18. Να βρεθεί πολυώνυμο το οποίο διαιρεί το πολυώνυμο: $P(x)= 3x^3+7x^2+x-2$ και δίνει πηλίκο $\Pi(x)=x+2$.

19. Να βρείτε τους α , $\beta\in R$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)=2x^3+\alpha x^2-\beta x-6$

και $Q(x)= x^3+\alpha x+\beta+1$ να έχουν κοινό παράγοντα το $x-2$.

20. Να βρείτε τους α , $\beta\in R$ ώστε το $(x+2)(x-1)$ να διαιρεί το πολυώνυμο $P(x)=2\alpha x^3+(\alpha-\beta+1)x^2-3x-\alpha-\beta+2$.

21. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\kappa,\lambda\in R$ ώστε το $x+1$ να είναι παράγοντας του $P(x)=x^4-(\kappa^2+\lambda)x^3-(3\lambda+1)x^2-2x+\lambda^2$.

22. Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του πολυωνύμου $P(x)$ με τα $x+1$, $x-3$ είναι αντίστοιχα 3 και 15. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: (x^2-2x-3).

23. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $3x^2-2x-5$ είναι $4x-3$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$.

24. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)=P(3x-5)+x^2-2x+2$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x-1)$ είναι -2 , να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $Q(x)$.

25. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των παρακάτω εξισώσεων και μετά να λυθούν.

α) $x^3 - 8x + 7 = 0$

β) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ) $(x^3 - 2x)\, x + x + 2 = 0$

δ) $(x - 1)\,(x^4 + 4) - 3\,(x + 4) = 0$

ε) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

26. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

β) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

γ) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

δ) $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

β) $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9\,(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ) $(x + 2)^8 - 3\,(x + 2)^4 - 4 = 0$

δ) $(\frac{x-1}{x})^2 - 5\,(\frac{x-1}{x}) + 6 = 0$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ **β)** $\frac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$

29. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{x^3+2x-4}{x-2} < 1$ **β)** $\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(2ημx - 1)^4 + 6\,(2ημx - 1)^2 - 7 = 0$

β) $2ημ^3x + 5ημ^2x + 5ημx + 2 = 0$

γ) $2συν^4x - 5συν^3x + 5συνx - 2 = 0$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-3} = 5$

β) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$

γ) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 2$

δ) $2\sqrt{5-4x} = 5 - 4x$

ε) $\sqrt{x^2-x+5} = x - 3$

32. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+1}$ **β)** $\sqrt{4x+1} < \sqrt{1-2x}$